**Прв колоквиум по линеарна алгебра и примени**

**2022**

Дадени се 3 проблеми кои носат по 50 поени. Треба да одберете **два** од нив за решавање. Тестот носи максимум 100 поени.

Ако решавате три од проблемите, ќе се бодуваат само два. Ќе се бодуваат оние проблеми кои ви носат повеќе поени.

**Проблем 1** (50 поени) Дадени се хранливите вредности по една порција на 4 вида житарки, А, В, С и D. Производот А содржи 100 калории, 2 g протеини, 1 g влакна, и 1 g масти. В содржи 160 калории, 5 g протеини, 7 g влакна и 4 g масти. С содржи 140 калории, 4 g протеини, 5 g влакна и 3 g масти. D содржи 130 калории, 3 g протеини, 18 g влакна, и 5 g масти.

А) (6) Поставете матрица M и вектор **u** така што М**u** ja дава количини на калории, протеини, влакна и масти содржани во мешавина од три порции од А, две порции В и една порција од D.

Б) (6) Дали е можно е мешавината од четирите житарки да обезбеди 130 калории, 3 g протеини, 2 g влакна и 1 g масти?

В) (5) Докажи дека ако W**x** = **0** има единствено решение, тогаш W**x** е инјекција!

Г) (6) Дали М**х** е инјекција? Дали М**х** е сурјекција? Објасни!

Д) (7) Докажи дека за било која матрица W, Col(W) e векторски потпростор.

Ѓ) (4) Најди една база и димензија за Col(M)!

Е) (3) Нека базата под Ѓ е Q. Нека координатите на векторот **v** во однос на базата Q се (3, 2, 0, 1)Т. Кои се неговите координати во однос на стандардната база?

Ж) (5) Нека базата под Ѓ е Q. Кои се координатите на векторот **v** во однос на базата Q, ако неговите координати во однос на стандардната база се (13, 1,2, 1)Т?

З) (5) Дали колоните на М претставуваат линеарно независно множество од R4? Ако да, докажи! Ако не, тогаш најди кој од вектор-колоните може да се запише како линеарна комбинација од претходните вектор колони и како!

Ѕ) (3) Нека U е 4х4 матрица. Што можеш да кажеш за третата колона на UM?

**Проблем 2** (50 поени) А) (5 поени) Напиши го системот равенки за мрежата дадена на сликата.

|  |  |
| --- | --- |
| Б) (2) Запиши го системот од облик А**x** = **b**.  В) (8) Направи LU факторизација за матрицата А  Г) (5) Пресметај инверзна матрица за L.  Д) (4) Запиши го системот во облик B**x** = **c**, каде В е матрица во ешалонска форма (ешалонската форма на А). |  |

Ѓ) (5) Докажи дека било систем равенки М**x** = **а**, каде М е матрица од ред mxn, има решение ако А има m пивот колони!

Е) (5) Најди го општото решение за непознатите величини на протокот!

Ж) (2) Дали множеството решенија под Е е векторски потпростор?

З) (2) Имајќи во предвид дека протокот на секое ребро е позитивен број, определи во кој интервал треба да се движат вредностите на x3!

Ѕ) (7) Докажи дека за било која матрица М, Null(М) е векторски потпростор!

И) (2) Од кој векторски простор е потпростор Null(A) за нашата матрица А?

Ј) (3) Определи една база за Null(A) за нашата матрица А и определи ја димензијата на Null(A)!

**Проблем 3** (50 поени) A) (7) Определи матрица А на симетрија во однос на правата y = -x и матрица B на ротација за 30° во правец обратен од движењето на стрелките на часовникот.

Б) (3) Определи матрица С која прво прави симетрија во однос на правата y = -x, а потоа ротација за 30° во правец обратен од движењето на стрелките на часовникот.

В) (5) Определи матрица на трансформација D која векторот [1, 1]T го пресликува во [2, 1]T, a векторот [1, 2]T го пресликува во [-1, 2]T!

Г) (2) Дефинирај инверзна матрица!

Д) (5) Докажи дека ако постои инверзна матрица за матрица M, тогаш таа е единствена!

Ѓ) (2+5) Докажи дека квадратната матрица M е инверзибилна акко M**x** = **b** има решение за секое **b**.

E) (4) Дали матрицата на проекција над права p е инверзибилна? Објасни!

Ж) (7) Пресметај ја матрицата X за која важи XDT + A = I, каде А и D се матриците од претходно.

З) (3) Определи матрица на транслација за вектор [1, 1]T.

Ѕ) (3) Определи матрица U која прво прави симетрија во однос на правата y = -x, а потоа транслација за вектор [1, 1]T.

И) (4) Определи ги координатите (користејќи хомогени координати) на векторот [1, 0]T во однос на трансформацијата U!